§7 Positive Elemente in C*-Algebren

Ist X ein lokalkompakter Raum, so nennen wir eine Funktion $f \in C_0(X)$ positiv, falls $f(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ gilt. Wegen $\sigma_{C_0(X)}(f) = \overline{f(X)}$ ist dies gleichbedeutend mit $f = \overline{f}$ und $\sigma(f) \subseteq [0,\infty)$. Dies motiviert:

7.1 Definition Sei A eine C*-Algebra. Ein $a \in A$ heißt positiv (Bez. $a \geq 0$), falls $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0,\infty)$.

Beachte: Ist $a = a^*$, so gilt $a^2 \geq 0$, denn nach 6.8 gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ und nach 6.7 folgt dann $\sigma(a^2) = \sigma(a)^2 \subseteq [0,\infty)$.

Bem: Ist $f \in C_0(X)$ eine reelle Fkt., so besitzt f eine eindeutige Zerlegung $f = f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$ und $f_+ \cdot f_- \equiv 0$ (setze $f_+ = \max(f,0)$ und $f_- = \max(-f,0)$) – die Eindeutigkeit folgt aus der Bed. $f_+ f_- \equiv 0$).

7.2 Lemma Sei A eine C*-Algebra und sei $a \in A$ mit $a = a^*$. Dann ex. eind. bestimmte Elemente $a_+, a_- \in A$ mit $a_+, a_- \geq 0$, $a_+ a = a a_+$, $a_- a = a a_-$ und $a_+ a_- = 0 = a_- a_+$.

Die Elemente a_+, a_- heißen positiver bzw. negativer Anteil von a.

Bew: Da $a = a^*$ gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Def $f_+, f_- : \sigma(a) \to \mathbb{R}$ durch $f_+ = \max(x,0)$, $f_- = -\max(-x,0)$ und setze $a_+ = f_+(a)$, $a_- = f_-(a)$ (geht, da $f_+(0) = f_-(0) = 0$).

Dann gilt $a_+, a_- \in C^*(a)$ und da $C^*(a)$ kommut. vertauschen alle Produkte mit a_+, a_-, a. Wegen $f_+ - f_- = id_{\sigma(a)}$ gilt $a_+ - a_- = id(a) = a$ und wegen $f_+ \cdot f_- = 0$ gilt auch $a_+ \cdot a_- = 0$.
Eindeutigkeit: Sind b_+, b_- weitere Elemente in A wie im Lemma, so ist insb.
$B = C^*(a, b_+, b_-)$ kommutativ, also $B \cong C_0(\hat{B})$ nach Gelfand-Naimark. Die Eindeutigkeit folgt dann aus obiger Bemerkung? ☒

7.3 Lemma Sei A eine unitale C^* Algebra und sei $a = a^* \in A$. Dann gelten:
(1) Ist $\|1 - a\| \leq 1$, so ist $a \geq 0$.
(2) Ist $\|a\| \leq 1$ und $a \geq 0$, so ist $\|1 - a\| \leq 1$
(3) Es gilt $a \geq 0 \iff \| \|a\| 1 - a\| \leq \|a\|$.

Bew: (1) Nach 6.8 gilt $\sigma(1-a) \subseteq [-1, 1]$ und nach 6.7 gilt $\sigma(1-a) = 1 - \sigma(a)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt aber $1 - x \in [-1, 1] \iff x - 1 \in [-1, 1] \iff x \in [0, 2]$, also folgt $\sigma(a) \subseteq [0, 2]$ und $a \geq 0$.
(2) $\|a\| \leq 1$ und $a \geq 0 \Rightarrow \sigma(a) \subseteq [0, 1]$, also $\sigma(1-a) = 1 - \sigma(a) \subseteq [-1, 1]$ und $\|a\| \leq 1$ nach 6.8
(3) „$\Rightarrow$" $a \geq 0 \overset{6.8}{\Rightarrow} \sigma(a) \subseteq [0, \|a\|]$
$\overset{6.7}{\Rightarrow} \sigma(\|a\| 1 - a) \subseteq \|a\| - \sigma(a) \subseteq \|a\| - [0, \|a\|] = [0, \|a\|]$.
Mit 6.8 folgt $\| \|a\| 1 - a\| \leq \|a\|$.
„$\Leftarrow$" Sei o.B.d.A $a \neq 0$. Durch Übergang auf $b = \frac{a}{\|a\|}$ folgt $\|1 - b\| \leq 1$, also $b \geq 0$ nach (1) und dann $a \geq 0$. ☒

7.4 Satz Sei A eine C^*-Algebra und sei A^+ die Menge der positiven Elemente in A. Dann gelten:

(1) A^+ ist abg. in A.

(2) A^+ ist ein positiver Kegel in A, d.h. für $a, b \in A^+$ und $\lambda \geq 0$ gilt $a+b, \lambda a \in A^+$.

(3) Es gilt $A^+ \cap -A^+ = \{0\}$.

(4) Zu jedem $a \in A$ ex. $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A^+$ mit
$$a = (a_1 - a_2) + i(a_3 - a_4).$$

Bew: Ist A ohne 1, so gilt per Definition, dass $A^+ = A \cap (A^1)^+$. Wir können daher o.B.d.A annehmen, dass A unital ist.

Zu (1): Sei $(a_n)_n$ eine Folge in A^+ mit $a_n \to a \in A$. Dann folgt
$$\underbrace{\| \|a_n\| \cdot 1 - a_n \|}_{\overset{7.3(3)}{\leq} \text{ da } a_n \geq 0 \ \|a_n\|} \to \| \|a\| \cdot 1 - a \|$$
$$\|a_n\| \to \|a\|$$

Damit folgt auch $\|a\| \geq \| \|a\| 1 - a\|$ und $a \geq 0$ (7.3(3)).

(2) Wegen $\sigma(\lambda a) = \lambda \sigma(a)$ ist $\lambda a \geq 0$ falls $a \geq 0$ und $\lambda \geq 0$. Seien nun $a, b \geq 0$ mit $a, b \neq 0$. Durch Übergang auf $\frac{1}{c}a, \frac{1}{c}b$ mit $c = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ können wir o.B.d.A $\|a\|, \|b\| \leq 1$ annehmen.

Dann folgt mit 7.3(2), dass $\|1 - a\|, \|1 - b\| \leq 1$, und dann auch
$\|1 - \frac{1}{2}(a+b)\| \leq \frac{1}{2}\|1 - a\| + \frac{1}{2}\|1 - b\| \leq 1$, also gilt $\frac{1}{2}(a+b) \geq 0$ nach 7.2(1), und dann auch $a+b \geq 0$.

(3) Ist $a \in A^+ \cap -A^+$, so gilt $a = a^*$ mit $\sigma(a) = \{0\}$.
Aber dann ist $\|a\| = 0$ nach 6.8.

(4) Mit $b = \mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*)$, $c = \mathrm{Im}(a) = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ gilt mit 7.2: $b = b_+ - b_-$, $c = c_+ - c_-$ mit $b_+, b_-, c_+, c_- \geq 0$. ∎

7.5 Bemerkung + Def: Es folgt aus 7.4, dass wir auf $A_{sa} := \{a \in A \mid a = a^*\}$ eine Ordnungsrelation „$\leq$" def. können durch

$$a \leq b :\iff b - a \geq 0$$

Es gelten dann: $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$

$a \leq b,\ 0 \leq \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a \leq \lambda b$, und

$a \leq b$ und $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$. (Nutze 7.4)

7.6 Lemma Sei A eine $\mathbb{C}$-Algebra und seien $a, b \in A$. Dann gilt $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

Bew: Sei o.B.d.A. A unital und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

Zeige: $ab - \lambda 1 \in G(A) \iff ba - \lambda 1 \in G(A)$.

Dazu: Sei $u = (ab - \lambda 1)^{-1}$. Dann gilt

$$abu = (ab - \lambda 1)u + \lambda u = 1 + \lambda u$$
$$= u(ab - \lambda 1) + \lambda u = uab$$

Damit folgt: $(ba - \lambda 1)(bua - 1) = babua - ba - \lambda bua + \lambda 1$

$$= b(\underbrace{abu}_{=1+\lambda u} - 1 - \lambda u)a + \lambda 1 = \lambda 1 = b(uab - 1 - \lambda u)a$$
$$= (bua - 1)(ba - \lambda 1)$$

Damit folgt $\frac{1}{\lambda}u = (ba - \lambda 1)^{-1}$! ∎

Bemerkung: Als direkte Folgerung erhalten wir: Ist A C^*-Algebra, $b, a \in A$ mit ba und ab selbstadj., so folgt $ba \geq 0 \iff ab \geq 0$.

Achtung: Ist $A = M_2(\mathbb{C})$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $ba = 0 \geq 0$, aber $ab = b \not\geq 0$!

7.7 Satz Sei A eine C^*-Algebra und sei $a = a^* \in A$. Dann sind äquivalent:

(1) $a \geq 0$ (2) $\exists b \in A$ mit $a = b^*b$

(3) $\exists c \geq 0$ mit $c^2 = a$ und $ca = ac$.

Das Element $c =: \sqrt{a}$ ist dann eindeutig bestimmt!

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (3). Da $a \geq 0$ gilt $\sigma(a) \subseteq [0,\infty)$ und damit ist $\sqrt{\cdot}: \sigma(a) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ wohldef. stetig und $\sqrt{0} = 0$. Setze dann $c := \sqrt{a}$ (Funktionalkalkül). Dann gilt $c \in C^*(a)$, also $ac = ca$ da $C^*(a)$ kommutativ.
Ferner gilt $c^2 = (\sqrt{\cdot})^2(a) = id_{\sigma(a)}(a) = a$.
Die Eindeutigkeit von c lassen wir als Übungsaufgabe.
(3) $\Rightarrow$ (2): Setze $b = c$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $a = b^*b$ für ein $b \in A$. Seien $a_+, a_- \in A^+$ wie in 7.2 und sei $u = \sqrt{a_+}$, $v = \sqrt{a_-}$ wie in (3).
Dann folgt $u \in C^*(a_+) \subseteq C^*(a)$, $v \in C^*(a_-) \subseteq C^*(a)$, d.h. alle Elemente u, v, a_+, a_-, a kommutieren.
Ferner gilt $vu^2v = v^2u^2 = a_+a_- = 0$.
Damit folgt

$$(bv)^*(bv) = vb^*bv = v(u^2 - v^2)v = \underbrace{vu^2v}_{=0} - v^4 = -v^4 \in -A^+.$$

Schreiben wir $bv = x + iy$ mit $x, y \in A_{sa}$, so folgt:

$$(bv)(bv)^* = \underbrace{(x+iy)(x-iy)}_{(bv)(bv)^*} + \underbrace{(x-iy)(x+iy)}_{=(bv)^*bv} + \underbrace{v^4}_{=-(bv)^*bv}$$
$$= 2(x^2+y^2) + v^4 \geq 0 \text{ nach 7.4.}$$

Mit 7.6 folgt auch $(bv)^*(bv) = -v^4 \geq 0$. Aber dann folgt $v^4 \in A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$, also $v^4 = 0$, und dann auch $v = 0$ (denn $v \geq 0$ und $v \neq 0$ folgt $v^4 \neq 0$ da $\sigma(v^4) = (\sigma(v))^4$).
Damit folgt $v^2 = 0$, also $a = u^2 - v^2 = u^2 \geq 0$. ∎

7.8 Bemerkung (1) Ist $B \subseteq A$ eine beliebige C^*-Unteralg. von A und ist $a = a^* \in B$, so gilt nach 6.3, dass

$$\sigma_B(a) \cup \{0\} = \sigma_A(a) \cup \{0\},$$

also $a \geq 0$ in B g.d.w. $a \geq 0$ in A. Positivität hängt also nicht davon ab, in welcher (Unter-)Algebra man das Element a betrachtet. Insbesondere gilt

$$a \geq 0 \iff \hat{a} \geq 0 \text{ als Element in } C_0(\sigma(a))$$

(2) Mit Hilfe von Satz 7.7 können wir nun den Betrag eines Elements a in einer C^*-Alg. A definieren: Wir setzen $|a| := \sqrt{a^*a} \geq 0$. Nach 7.7 (2) ist $a^*a \geq 0$, also ist $|a| = \sqrt{a^*a}$ wohldef.

Wir wollen nun positive Elemente in $L(H)$ für einen $\mathbb{C}$-HR H betrachten:

7.9 Satz Sei $T \in L(H)$ mit $T = T^*$. Dann gilt

$$T \geq 0 \iff \forall x \in H \text{ gilt: } \langle Tx, x \rangle \geq 0.$$

Bew: „$\Longrightarrow$" Ist $T \geq 0$, so ex. nach 7.7 ein $S \in L(H)$ mit $T = S^*S$. Ist dann $x \in H$, so folgt

$$\langle Tx, x \rangle = \langle S^*Sx, x \rangle = \langle Sx, Sx \rangle \geq 0.$$

„$\Longleftarrow$" Wir zeigen zunächst, dass für $T = T^*$ gilt

$$\|T\|_{op} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| =: d.$$

Dazu zeigen wir $|\langle Tx, y \rangle| \leq d \|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in H$, also $\|T\|_{op} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle|) \leq d$

und offensichtlich gilt $|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|_{op}$ $\forall x \in H$ mit $\|x\| \leq 1$, also folgt $d \leq \|T\|_{op}$.

Seien dazu $0 \neq x, y \in H$. Wegen
$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2(\langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle)$$
folgt: $2|\langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle| \leq |\langle T(x+y),x+y\rangle| + |\langle T(x-y),x-y\rangle|$
$$\leq d(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \overset{\square\text{-Gl}}{=} 2d(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
Dann folgt mit $x' = \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}} x,\ y' = \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^{\frac{1}{2}} y$:
$$|\langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle| = |\langle Tx',y'\rangle + \langle Ty',x'\rangle| \leq d(\|x'\|^2 + \|y'\|^2)$$
$$= d(\|y\|\|x\| + \|x\|\|y\|) = 2d\|x\|\|y\|.$$

Wähle nun $s,t \in \mathbb{R}$ mit $e^{is}\langle Tx,y\rangle,\ e^{it}\langle Ty,x\rangle \geq 0$.
Dann ex. $\varphi,\psi \in \mathbb{R}$ mit $s = \varphi+\psi$, $t = \varphi-\psi$ und so
folgt $|\langle Tx,y\rangle| + |\langle Ty,x\rangle| = e^{i(\varphi+\psi)}\langle Tx,y\rangle + e^{i(\varphi-\psi)}\langle Ty,x\rangle$
$$= |e^{i\varphi}\langle T(e^{i\psi}x), x\rangle + e^{i\varphi}\langle Ty, e^{i\psi}x\rangle| \leq 2d\|e^{i\psi}x\|\|y\|$$
$$= 2d\|x\|\|y\|.$$
Da $|\langle Ty,x\rangle| = |\langle y,Tx\rangle| = |\langle Tx,y\rangle|$ folgt $|\langle Tx,y\rangle| \leq d\|x\|\|y\|$ für alle $x,y \in H$.

Sei nun $\langle Tx,x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ und sei o.B.d.A. $\|T\|_{op} = 1$. Nach 7.3 genügt es zu zeigen, dass $\|1-T\|_{op} \leq 1$. Ist aber $x \in H$ mit $\|x\| = 1$, so gilt $0 \leq \langle Tx,x\rangle \leq 1$, also $|\langle (1-T)x, x\rangle| = \underbrace{\langle x,x\rangle}_{=1} - \langle Tx,x\rangle \leq 1$ und damit $\|1-T\|_{op} \leq 1$. ∎

7.10 Definition Sei A eine unitale C^*-Algebra. Ein Element $u \in A$ heißt *unitär*, falls
$$uu^* = u^*u = 1 \quad (\text{also } u^* = u^{-1})$$
gilt. Wir setzen $\mathcal{U}(A) := \{u \in A \mid u \text{ unitär}\}$.
$\mathcal{U}(A)$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation.

7.11 Satz: Ist $A = L(H)$ für einen $\mathbb{C}$-HR H, so gilt $U \in L(H)$ unitär g.d.w. $U: H \to H$ isometrisch (also $\|Ux\| = \|x\| \; \forall x \in H$) und surjektiv (also $U(H) = H$).

Bew: „$\Rightarrow$" Ist U unitär, so gilt $U^{-1} = U^*$, also ist U bijektiv und $\langle Ux, Uy\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$, also ist U isometrisch.

„$\Leftarrow$" Sei nun U isometr. und surjektiv. Dann ist U auch bijektiv, da isometr. $\Rightarrow$ injektiv. Damit ist U nach dem Satz von d. offenen Abb invertierbar. Mit Polarisierungsformel gilt wegen U isometr. auch $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \; \forall x, y \in H$. Damit folgt $\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, also $0 = \langle U^*Ux - x, y\rangle = \langle (U^*U - 1)x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.
Es folgt $U^*U = 1$ und $U^{-1} = \underbrace{U^*U}_{=1}U^{-1} = U^*\underbrace{UU^{-1}}_{=1} = U^*$. ∎

7.12 Bemerkung: Im Fall $A = \mathbb{C}$ ist $u \in A$ unitär g.d.w. $|u|^2 = \bar{u}u = 1$, also $|u| = 1$. In Ana I haben wir gelernt: Ist $z \in \mathbb{C}$ beliebig, so gilt
$$z = u|z| \text{ mit } u = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi), \text{ also } u \text{ unitär}$$
(Polarzerlegung). Eine solche Zerlegung gilt auch für invertierbare Elemente in C*-Algebren.

7.13 Satz (Polarzerlegung) Sei A eine unitale C*-Alg. und sei $a \in G(A)$. Dann ex. genau ein $u \in U(A)$ mit $a = u|a|$.

Bew: Da $a \in G(A)$ ist auch $a^*a = |a|^2 \in G(A)$ und dann auch $|a| \in G(A)$. Setze $u = a|a|^{-1}$.
Dann folgt: $u^*u = |a|^{-1}a^*a|a|^{-1} = |a|^{-1}|a|^2|a|^{-1} = 1$,

also folgt $u^{-1} = \underbrace{u^{-1}u}_{=1}u^{-1} = \underbrace{u^*u}_{=1}\,u\,u^{-1} = u^*$, also ist u unitär. Natürlich gilt $u|a| = a|a|^{-1}|a| = a$ ☒

7.14 Bemerkung Eine entsprechende Zerlegung gilt im allg. nicht wenn $a \in A$ nicht invertierbar ist. Betr. z.B. $A = C[-1,1]$ und $a(x) = x$. Dann gilt $|a|(x) = |x|$ und für ein Elt. u mit $a = u|a|$ müsste $u(x) = 1$ für $x > 0$ und $u(x) = -1$ für $x < 0$ gelten. Aber damit wäre u nicht stetig!

Man kann aber zeigen: Ist $T \in L(H)$ so ex. eine Polarzerlegung mit u partielle Isometrie (dh ex. $\exists$ abg. TR. $H_1, H_2 \subseteq H$ mit $u_{|H_1} : H_1 \to H_2$ isometr. + surjektiv und $u_{|H_1^\perp} = 0$).

Wir schließen den Abschnitt mit:

7.15 Lemma: Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt $a \leq b \Rightarrow x^*ax \leq x^*bx \;\; \forall x \in A$. Ferner gilt: Ist A unital und sind $a, b \in G(A)$ mit $0 \leq a \leq b$, so gilt auch $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Bew: Da $b - a \geq 0$ $\exists y \in A$ mit $y^*y = b - a$. Dann folgt:
$x^*bx - x^*ax = x^*(b-a)x = x^*y^*yx = (yx)^*(yx) \geq 0$.
Ist A unital, so folgt zunächst für $c \geq 1$:
$c^{-1} = c^{-\frac{1}{2}}\,1\,c^{-\frac{1}{2}} \leq c^{-\frac{1}{2}}c\,c^{-\frac{1}{2}} = 1$, also $c^{-1} \leq 1$.
Sind dann $a, b \in G(A)$ mit $0 \leq a \leq b$, so folgt
$1 = a^{-\frac{1}{2}}a\,a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}}b\,a^{-\frac{1}{2}}$, und damit
$a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}} \leq 1$ und dann
$b^{-1} = a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}}\,1\,a^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}$. ☒